

د. بهان

جامعة الملك سعود / كلية العلوم قسم الرياضيات	الفصل الثاني 1433/1432 الزمن // ثلاث ساعات	
الإسم / ..... رقم الشعبة / .....	الإختبار النهائي في المقرر 244 رياض	الرقم الجامعي / ..... أستاذ المادة / .....

درجة الجزء الأول

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	الدرجة
رمز الإجابة	٤	٤	ب	ب	د	ب	ب	د	ج	٤	

درجة الجزء الثاني

رقم السؤال	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	الدرجة
الدرجة	4	3	4	5	7	7	

الدرجة النهائية	50
-----------------	----

لاحظ أن :

(1) عدد الورقات: 10

(2) استخدم خلف الورقات مع الورقة الإضافية كمسودات بدون نزع الورقة الأخيرة

(3) لا تكتب بقلم الرصاص

**الجزء الأول : [ درجتان لكل سؤال ]**

ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من 1 إلى 10 في الجدول المعطى :

(1) إذا كان  $u, v$  متجهين غير صفريين متعامدين في فضاء ضرب داخلي  $V$  فإن مجموعة قيم الثابت  $k$  التي تجعل  $\|u - 3v\| = \|u + kv\|$  هي:

- (أ)  $\{-3, 3\}$  (ب)  $\{-3\}$  (ج)  $\emptyset$  (د)  $R$

(2) إذا كان  $T: R^3 \rightarrow R^3$  تحويلًا خطيًا معرفًا بالقاعدة  $T(x, y, z) = (x + y - 2z, x - y, -2x + y + z)$  و  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  و  $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  فإن المصفوفة  $[T]_B^S$  تساوي:

- (أ)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$  (ب)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$  (ج)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$  (د)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) مجموعة قيم الثابت  $\alpha$  التي تجعل المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  قابلة للإسقاط هي:

- (أ)  $\{1, 3\}$  (ب)  $R$  (ج)  $R \setminus \{1, 3\}$  (د)  $\emptyset$

(4) إذا كان  $T: R^2 \rightarrow R^3$  تحويلًا خطيًا حيث  $T(1, 1) = (1, 0, 2)$ ;  $T(2, 1) = (1, -1, 1)$  فإن  $T(x, y)$  تساوي:

- (أ)  $(x, -x + y, x + 3y)$  (ب)  $(y, -x + y, -x + 3y)$  (ج)  $(y, x + y, x - 3y)$  (د)  $(-y, x - y, x + y)$

(5) إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 2 & x & -1 \\ 1 & y & 3 \\ -3 & z & 4 \end{bmatrix}$  و كان  $|A| = ax + by + cz$  فإن:

- (أ)  $c = 4$  (ب)  $c = -4$  (ج)  $c = 7$  (د)  $c = -7$

(6) إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} \alpha - 4 & 3 & 0 \\ 3 & \alpha - 4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 7 \end{bmatrix}$  فإن مجموعة قيم الثابت  $\alpha$  التي تجعل النظام المتجانس  $AX = 0$  له عدد غير منته من الحلول هي:

- (أ)  $\{-1, 7\}$  (ب)  $\{1, 7\}$  (ج)  $\{-1, -7\}$  (د)  $\{1, -7\}$

(7) إذا كان  $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$  فإن:

(ب)  $W$  فضاء جزئي من  $M_{2 \times 2}$  وبعده 2

(د)  $W$  ليس فضاء جزئياً من  $M_{2 \times 2}$

(أ)  $W$  فضاء جزئي من  $M_{2 \times 2}$  وبعده 1

(ج)  $W$  فضاء جزئي من  $M_{2 \times 2}$  وبعده 3

(8) القيم المميزة للمصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  هي:

(د) -1, -1, 2

(ج) 1, 2, -2

(ب) -2, 1, 2

(أ) 1, 2, 2

(9) إذا كانت كل من  $B = \{1, x, x^2\}$  و  $C = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$  أساسين في  $P_2[x]$  فإن مصفوفة الانتقال  $P_B^C$  من  $B$  إلى  $C$  تساوي:

(ب)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(أ)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(د)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ج)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(10) إذا كان  $T: R^3 \rightarrow R^4$  تحويلاً خطياً حيث  $T(x, y, z) = (x - y + 2z, x - 2y + 3z, -x - 2y + z, x + y)$  فإن صفرية التحويل الخطي  $T$  أي  $nullity(T)$  تساوي:

(د) 4

(ج) 3

(ب) 2

(أ) 1

الجزء الثاني : أجب على الأسئلة التالية في نفس ورقة الأسئلة :  
السؤال الأول : [ 4 درجات ]

$$x + 2y + 3z - 2t = 6$$

$$2x - y - 2z - 3t = 8$$

$$3x + 2y - z + 2t = 4$$

$$3x + y + z - 5t = 14$$

استخدم طريقة جارس لإيجاد حلول النظام :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -5 & 14 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 5/2 & -2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -9/2 & 9 & -27/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

②

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 5/2 & -2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ y + \frac{5}{2}z - 2t = \frac{7}{2} \\ z - 2t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3(3 + 2t) + 2t + 6 \\ y = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}(3 + 2t) + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

①

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -4 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

①

مجموعة حلول النظام هي :

$$S = \{ (5 + 2t; -4 - 3t; 3 + 2t; t) / t \in \mathbb{R} \}$$

السؤال الثاني: [ 3 درجات ]

$$x - y + 2z = 0$$

$$2x - y + 3z = -1$$

$$x + y + 2z = 2$$

استخدم طريقة كرامر لإيجاد كل من  $z$  و  $y$  في النظام

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

كذلك النظام يكتب على الترتيب

①

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2 - 3 + 4) - (-2 + 3 - 4) = 2 \neq 0$$

بما أن  $A$  لها محسوس فبالتالي يمكن حل النظام بطريقة كرامر

①

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{(-2 + 0 + 8) - (-2 + 6 + 0)}{2} = 1$$

①

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{(-2 + 1 + 0) - (0 - 1 - 4)}{2} = 2$$

السؤال الثالث: [ 4 درجات ]

إذا كان الضرب الداخلي على  $R^2$  معرفاً بالقاعدة  $\langle (a,b); (c,d) \rangle = 2ac + bd$  فاستخدم طريقة جرام شميدت لتحويل الأساس  $\{u_1 = (1,2); u_2 = (2,1)\}$  إلى أساس عياري متعامد  $B = \{w_1; w_2\}$  ثم عن  $[v]_B$  حيث  $v = (4,3)$

$$\{v_1 = u_1; v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1\}$$

①

$$v_1 = (1,2); \|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{\langle (1,2), (1,2) \rangle} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$$

$$v_2 = (2,1) - \frac{\langle (2,1), (1,2) \rangle}{6} (1,2)$$

①

$$v_2 = (2,1) - (1,2) = (1,-1); \|v_2\| = \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle} = \sqrt{3}$$

$$B = \{w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}\}$$

①

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 2)$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1)$$

$$v = \langle v/w_1 \rangle w_1 + \langle v/w_2 \rangle w_2$$

$$\langle v/w_2 \rangle = \langle (4, 3) | \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1) \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (4, 3) | (1, -1) \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (4 - 3) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\langle v/w_1 \rangle = \langle (4, 3) | \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle (4, 3) | (1, 2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (4 + 6) = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \langle v/w_1 \rangle \\ \langle v/w_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

①

- (1) أوجد الصيغة الصفية الدرجة المختزلة للمصفوفة A  
 (2) عين rank(A) و nullity(A)  
 (3) عين أساساً لفضاء الصفوف Row(A)  
 (4) بين فيما إذا كانت A لها معكوس أم لا علل إجابتك.

السؤال الرابع: [6 درجات]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -5 & 3 \\ 3 & -9 & 12 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{لتكن}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -5 & 3 \\ 3 & -9 & 12 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & -4 \\ 0 & 18 & -25 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ①$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③

①

rank A = 3  
 nullity A = 1

①

Row A =  $\langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -2/3), (0, 0, 1, 0) \rangle$

①

|A| = 0 ليس لها معكوس لأن

**السؤال الخامس [ 6 درجات ]**

ليكن  $T: R^3 \rightarrow R^3$  تحويل خطيا معرفا بالقاعدة:  $T(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - y + 2z, 3x + y + 3z)$  وليكن

$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  الأساس القياسي في  $R^3$ .

(1) عين مصفوفة التحويل الخطي  $[T]_S$

(2) عين الصيغة الصفية الدرجة المختزلة للمصفوفة  $[T]_S$

(3) استنتج  $rank(T)$  و  $nullity(T)$

(4) عين أساسا للنضاء  $\ker(T)$

$$T(1, 0, 0) = (1, 2, 3) \quad \textcircled{1}$$

$$T(0, 1, 0) = (2, -1, 1)$$

$$T(0, 0, 1) = (1, 2, 3) \quad \textcircled{2}$$

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{عين}$$

1.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1

(3) من خلال الصورة المثلثية لـ  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  فإن  $\text{Rank } T = 2$  و  $\text{nullity } T = 1$  (من الصورة المثلثية)

$$\ker T = \{x \in \mathbb{R}^3 / T(x) = 0\} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{فإن } X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker T \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

1.5

$$\begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$X = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$$

$$\ker T = \langle (1, 0, -1) \rangle$$



- (1) أثبت أن القيم المميزة المختلفة للمصفوفة  $A$  هي 1 و -3 و 3.  
 (2) أثبت أن  $A$  قابلة للإستقطار.  
 (3) عين مصفوفة  $P$  بحيث  $P^{-1}AP$  تكون مصفوفة قطرية.  
 (4) إستخدم من الفقرة (1) لإيجاد  $\det(A^n)$  لكل عدد صحيح  $n$ .

المسألة السادسة: [ 7 درجات ]  
 لتكن  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

① القيم المميزة لـ  $A$  هي جذور المعادلة المميزة

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & -1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ -5 & 0 & (-2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 \\ 0 & (-2-\lambda) \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & (1-\lambda) \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) - 5(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)[(2-\lambda)(-2-\lambda) - 5]$$

$$= (1-\lambda)[-4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 5]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 9) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3)$$

لذلك القيم المميزة لـ  $A$  هي 1 و 3 و -3.

② بما أن جميع القيم المميزة لـ  $A$  هي مختلفة

فإن  $A$  هي قابلة للإستقطار.

③ الفضاء المميز  $E_1$  المقابل للقيمة المميزة  $\lambda=1$

$$E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 / (A - I)X = 0\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{لأن } X \in E_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -5x - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ -8z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0$$

①

$$E_1 = \{ (0, y, 0) / y \in \mathbb{R} \}$$

$$E_1 = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

في  $\lambda=3$  Subspace الخاص  $E_3$  الخاص بالقيمة  $\lambda=3$  هو

$$E_3 = \{ X \in \mathbb{R}^3 / (A - 3I)X = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{فإن } X \in E_3 \text{ إذاً}$$

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} -x - z = 0 \\ -2y = 0 \\ -5x - 5z = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$X(x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$$

①

$$E_3 = \langle (1, 0, -1) \rangle$$

في  $\lambda=3$  Subspace الخاص  $E_3$  الخاص بالقيمة  $\lambda=3$  هو

$$E_{-3} = \{ X \in \mathbb{R}^3 / (A + 3I)X = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{فإن } X \in E_{-3} \text{ إذاً}$$

$$\begin{cases} z = 5x \\ y = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 5x - z = 0 \\ 4y = 0 \\ -5x + z = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$X = (x, 0, 5x) = x(1, 0, 5)$$

①

$$E_{-3} = \langle (1, 0, 5) \rangle$$

①

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad [A]$$

①

نلاحظ  $\det D^n = \det A^n$  ، ولـ  $n \geq 0$  (4)

$$\det A^n = 1 \times 3^n \times (-3)^n = (-1)^n 3^{2n}$$